Sinus/Cosinus Eigenschaften

$$a = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$$
$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot a$$
$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \tfrac{\pi}{2})$$
$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2})$$
$$-\cos(\alpha) = \cos(\alpha + \pi)$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Sinussignal

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\tfrac{2\pi}{T}t + \varphi)$$
$$\omega = 2\pi f = \tfrac{2\pi}{T}$$

Abtastung/Aliasing

Abtastintervall T_s
Abtastrate $r = \frac{1}{T_s}$

$s[n] = s(n \cdot T_s) = s(\frac{n}{r})$
$s[n] = A\cos(\omega T_s n + \varphi) = A\cos(\hat{\omega} n + \varphi)$
$\hat{\omega} = \omega T_s = \frac{\omega}{r}$

Alias-Frequenzen: $\hat{\omega}_k = \hat{\omega}_0 + 2\pi k$ und $\hat{\omega}_k = 2\pi k - \hat{\omega}_0$
Haupt-Aliasfrequenz: $-\pi < \hat{\omega}_0 \leq \pi$

Abtast-Theorem: Fehlerfreie Rekonstruktion, wenn $r > 2f_{\max}$

Komplexe Zahlen

$$z = x + jy$$
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$|z| = |z^*|$$
$$z \cdot z^* = |z|^2$$
$$z + z^* = 2Re\{z\}$$
$$\frac{1}{j} = -j$$

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$$
$$e^{j0} = 1; \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = j; \quad e^{j\pi} = -1; \quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$z = |z| \cdot e^{j\alpha} = |z| \cdot (\cos(\alpha) + j\sin(\alpha))$$
$$\alpha = arg(z) = \begin{cases} arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ arctan(\frac{y}{x}) \pm \pi & x < 0 \end{cases}$$
$$2 \cdot \cos(\alpha) = e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}$$
$$2j \cdot \sin(\alpha) = e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}$$

Komplexes Sinussignal

$$z(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)} = A\cos(\omega t + \varphi) + j \cdot A\sin(\omega t + \varphi)$$
$$x(t) = Re\{Ae^{j(\omega t + \varphi)}\} = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$= \tfrac{1}{2}Xe^{j\omega t} + \tfrac{1}{2}X^*e^{-j\omega t}$$
$$X = Ae^{j\varphi}(Phasor)$$

Summe/Linearkombination von Sinussignalen

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} Re\{A_k e^{j\varphi_k} e^{j\omega t}\} \text{ (gleiche Frequenz)}$$
$$= Re\{\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) e^{j\omega t}\} \text{ mit } X_k = A_k e^{j\varphi_k}$$
$$= Re\{Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}\}$$
$$= A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\omega_k t} \text{ mit } \omega_0 = 0 \text{ und}$$
$$a_0 = X_0 \text{ (Gleichanteil)}$$
$$a_k = \tfrac{1}{2}X_k$$
$$a_{-k} = \tfrac{1}{2}X_k^* \text{ und } \omega_{-k} = -\omega_k$$

Produkt von Sinussignalen

Mit $\omega_M = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ und $\omega_\Delta = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$:

$$s(t) = 2 \cdot \cos(\omega_M t) \cdot \cos(\omega_\Delta t)$$
$$= \cos((\omega_M + \omega_\Delta)t) + \cos((\omega_M - \omega_\Delta)t)$$
$$= \cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_1 t)$$
$$s(t) = 2 \cdot \sin(\omega_M t) \cdot \cos(\omega_\Delta t)$$
$$= \sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_1 t)$$

Schwebungstöne: Add. zweier Sinusig. ähnl. Freq. ω_1 und ω_2.

Fourier-Reihe

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_T t}$$

Im Spektrum gilt: $\omega_k = k\omega_T$ (Spektrallinien äquidistant)

Bestimmung der Grundfrequenz:

$$\omega_T = \begin{cases} \omega_1 & \text{falls } a_1 \neq 0 \\ ggT(\omega_1, \omega_2, \ldots) & \text{falls } a_1 = 0 \end{cases}$$

Fourier-Analyse

$$(s_1, s_2) = \int_0^T s_1(t) \cdot s_2^*(t)dt \text{ (Skalarprodukt)}$$
$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)e^{-j\omega_T kt}dt \text{ (Sonderfall bei } k = 0)$$
$$\left(\textbf{Geometrische Reihe}: \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

Filter

$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k]\delta[n-k]$ (Signal über Einheitsimpuls)

$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b[k]\delta[n-k] = b[n]$ (Impulsantwort)

$g[n] = s[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]s[n-k]$ (Faltung/Differenzengl.)

Kaskadierung: $h[n] = h_1[n] * h_2[n] * \ldots$

Faltung ist kommutativ, assoziativ, $\delta[n]$ ist neutrales Element.
Filter ist kausal, wenn $k \geq 0$. (sieht nicht in Zukunft)

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

LSI-Systeme

linear, zeit/verschiebungs-invariant

zeitinvariant: $s[n-n_0] \Rightarrow g[n-n_0]$
linear: $s[n] = a \cdot s_1[n] + b \cdot s_2[n] \Rightarrow g[n] = a \cdot g_1[n] + b \cdot g_2[n]$

Jedes FIR-Filter ist ein LSI-System.

Übertragungsfunktion (Fouriertransformation)

$S(\hat{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]e^{-j\hat{\omega}n}$ (Spektrum)

$H(\hat{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\hat{\omega}n} = |H(\hat{\omega})|e^{j\vartheta(\hat{\omega})}$

$G(\hat{\omega}) = S(\hat{\omega}) \cdot H(\hat{\omega})$

Kaskadierung: $H(\hat{\omega}) = H_1(\hat{\omega}) \cdot H_2(\hat{\omega}) \cdot \ldots$

Inverse Fouriertransformation:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H(\hat{\omega})e^{j\hat{\omega}n}d\hat{\omega}$$

$H(\hat{\omega}) = H^*(-\hat{\omega})$ und $H(\hat{\omega})$ ist 2π-periodisch.

Amplitudengang:	$\lvert H(\hat{\omega})\rvert$	$\lvert H(\hat{\omega})\rvert = \lvert H(-\hat{\omega})\rvert$
Phasengang:	$\vartheta(\hat{\omega})$	$\vartheta(\hat{\omega}) = -\vartheta(-\hat{\omega})$

Gleitender Mittelwert der Länge L ($h[n] = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\delta[n-k]$):

$\Rightarrow$ Dirichlet-Funktion: $H(\hat{\omega}) = \frac{\sin(\frac{L}{2}\hat{\omega})}{L \cdot \sin(\frac{\hat{\omega}}{2})}e^{-j\hat{\omega}\frac{L-1}{2}}$

z-Transformation

$S_z(z) = \sum_{k=0}^{N} s[k]z^{-k}$ mit $z = e^{j\hat{\omega}}$

$H_z(z) = \sum_{k=0}^{N} h[k]z^{-k}$ (Systemfunktion)

$G_z(z) = H_z(z) \cdot S_z(z)$

Kaskadierung: $H_z(z) = H_{z1}(z) \cdot H_{z2}(z) \cdot \ldots$

Erweiterung: $z = re^{j\hat{\omega}}$

Shift: $s[n-n_0] = s[n] * \delta[n-n_0] \Rightarrow z^{-n_0} \cdot S_z(z)$

Faktorisierung entspricht Zerlegung des LSI-Sytems!

Nulling Filter

1. Ordnung: $H_z(z) = 1 - z_1 z^{-1} = \frac{z-z_1}{z}$

   Mit $|z_1| = 1$ und z_1 reell
   $\Rightarrow z_1 = 1$ oder $z_1 = -1$
   $\Rightarrow \hat{\omega}_1 = 0$ oder $\hat{\omega}_1 = \pi$

2. Ordnung: $H_z(z) = (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_1^* z^{-1}) = 1 - 2\cos(\hat{\omega}_1) \cdot z^{-1} + z^{-2}$

   Blendet gezielt die Frequenzen $\hat{\omega}_1$ und $\hat{\omega}_2 = -\hat{\omega}_1$ aus.

Bandpass Filter

1. M äquidistante Nullstellen:

$$z_k = e^{j\frac{2\pi k}{M}}, \quad k = 1, \ldots, M$$

$$\Rightarrow P_M(z) = 1 - z^{-M} = \frac{z^M - 1}{z^M} = z^{-M} \cdot \prod_{k=1}^{M} (z - z_k)$$

2. Nullstellen im Durchlassbereich und Umgebung entfernen:

$$e^{j\frac{2\pi m}{M}} = e^{j\hat{\omega}_m} \Rightarrow m = \frac{M \cdot \hat{\omega}_m}{2\pi}$$

$$\Rightarrow m_{min} = m - d \leq k \leq m + d = m_{max}$$

$$\Rightarrow H_z(z) = \frac{P_M(z)}{\prod_{k=m_{min}}^{m_{max}} (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})}$$

Skalarprodukte

$(x, y) = x \cdot y = x^T y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$

$(x, y) = x \cdot y^* = x^T y^* = x_1 y_1^* + \ldots + x_n y_n^*$ mit $x, y \in \mathbb{C}^n$

$v_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ $(k = 0, \ldots, N-1)$ $\quad v_l[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}ln}$ $(l = 0, \ldots, N-1)$ $\quad$ (diskrete Sinusfkt. mit $\hat{\omega} = \frac{2\pi}{N}k$)

$$(v_k, v_l) = \sum_{n=0}^{N-1} v_k[n] v_l^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-l)} = \frac{1 - e^{j2\pi(k-l)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)}} = \begin{cases} N & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

$\Rightarrow v_k, v_l$ sind orthogonal und es gilt: $||v_k|| = \sqrt{N}$.

$g[n] = s[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]s[n-k] = (h, s)$ mit $s = [s[n], \ldots, s[n-(N-1)]]^T \in \mathbb{R}^n$ und $h = [h[0], \ldots, h[N-1]]^T \in \mathbb{R}^n$

$S(\hat{\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]\left(e^{j\hat{\omega}n}\right)^* = (s, v_{\hat{\omega}})$ mit $s = [s[0], \ldots, s[N-1]]^T \in \mathbb{R}^n$ und $v_{\hat{\omega}} = [1, e^{j\hat{\omega}}, \ldots, e^{j\hat{\omega}(N-1)}]^T \in \mathbb{C}^n$

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

N diskrete äquidistante Frequenzen:

$$\hat{\omega}_k = \frac{2\pi}{N}k \qquad (k = 0, \ldots, N-1)$$

$$S_d[k] = S(\hat{\omega} = \tfrac{2\pi}{N}k) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

DFT tastet $S(\hat{\omega})$ äquidistant mit Abstand $\frac{2\pi}{N}$ ab.
DFT ist periodisch mit N.

$S_d[N-k] = S_d[-k] = S_d^*[k]$

Inverse DFT

$$s[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_d[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Skalarprodukt und DFT

$s = [s[0], \ldots, s[N-1]]^T \in \mathbb{R}^n$

$v_k = [v_k[0], \ldots, v_k[N-1]]^T \in \mathbb{C}^n$ mit $v_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

$$S_d[k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]\left(e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right)^* = (s, v_k) = (v_k^*, s) = v_k^{*T} \cdot s$$

Fouriermatrix

$$S_d = W \cdot s$$

$$W = \begin{bmatrix} v_0^*[0] & \cdots & v_0^*[N-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N-1}^*[0] & \cdots & v_{N-1}^*[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Inverse Fouriermatrix:

$$W^{-1} = \frac{1}{N} W^*$$
$$\Rightarrow s = \frac{1}{N} W^* \cdot S_d$$

MATLAB-Funktionen

stem(t, s)/plot(t, s)	z.B. stem([0:0.2:2*pi], sin([0:0.2:2*pi]))
compass(z)	z.B. compass([exp(j*pi/2), exp(j*pi/4)])
conv(s, h)	z.B. conv([1, 1, 1, 1, 1], [1/4, 1/4, 1/4, 1/4])
poly(Nullstellen)	z.B. poly([1 2 3])
roots(Polynom)	z.B. roots([1 -6 11 -6])
zplane(Nullstellen, Pole)	z.B. zplane([1; -1; j], [0; 0])

H = freqz(h, 1, omega) z.B.:

```
omega = [-pi : 0.001 : pi];
H = freqz([1/4, 1/4, 1/4, 1/4], 1, omega);
plot(omega, abs(H))
plot(omega, angle(H))
```

abs(z)	Betrag
angle(z)	Phase, wie atan2(imag(z), real(z))

DFT = fft(s) z.B.: fft([0 1 2 3 4 5 4 3 2 1 0])
fftshift(DFT)