1 Definitionen

- Ein **Signal** ist die physikalische Darstellung von Informationen

- **Sinussignale** sind Grundbausteine zur Erzeugung von Signalen

  - Viele physikalische Systeme erzeugen Sinussignale

- "**Sampling**" ist das Abtasten eines zeitkontinuierlichen Signals zu äquidistanten Zeitpunkten: $s[n] = s(nT_s) = s(\frac{n}{r})$ mit $r = \frac{1}{T_s}$

- **Abtasttheorem**: Ein bandbegrenzetes zeitkontinuierliches Signal $s(t)$ mit Frequenzen kleiner als f_{max} kann fehlerfrei aus seinen Abtastwerten rekonstruiert werden, wenn die Abtastrate $r > 2f_{max}$ ist

- **Aliasing**: Verschiedene zeitkontinuierliche Signale können nach Abtastung mit der selben Abtastrate r dasselbe zeitdiskrete Signal ergeben

- **Folding**: Vorzeichenwechsel der Phase nach dem Abtasten um negative Kreisfrequenzen zu vermeiden

- **AD-Wandler**: Abtastung -> Quantisierung -> Bit-Codierung

- Ein **Phasor** ist eine komplexe Amplitude der Form $X = Ae^{j\varphi}$. Durch Multiplikation mit $e^{j\omega t}$ entsteht ein rotierender Phasor, der ein komplexes Sinussignal beschreibt

- **Periodische Signale** können durch Linearkombination (Fourierreihe) von Sinussignalen mit einer Grundfrequenz ω_T und ganzzahligen Vielfachen $k\omega_T,\ k \in \mathbb{Z}$ synthetisiert werden

  - Periodizität:
    * $t \in D(s) \Leftrightarrow t + T \in D(s)$
    * $s(t + T) = s(t)\ \forall t \in D(s)$

- **Fourieranalyse**: Bestimmung der komplexen Koeffizienten a_k für gegebenes periodisches Signal durch das normierte Skalarprodukt. Achtung Sonderfall für a_0!

- Die **Fouriertransformation** entspricht der z-Transformation ausgwertet für $z = e^{j\hat{\omega}}$ auf dem Einheitskreis

- Das **Spektrum** $S(\hat{\omega})$ gibt an mit welchen Amplituden $|S(\hat{\omega})|$ und Phasen $\theta(\hat{\omega})$ ein Signal $s[n]$ aus komplexen Sinussignalen $e^{j\hat{\omega}n}$ synthetisiert wird

- Die **Impulsantwort** $h[n]$ eines LSI-Systems ist gleich der Folge der Filterkoeffizienten $\{b_k\}$ und ansonsten 0. Sie beschreibt das System eindeutig.

- **Kausalität**: Berechnung des aktuellen Ausgangswertes $g[n]$ erfordert nur aktuellen Eingangswert $s[n]$ und Eingangswerte $s[n-k]$ aus der Vergangenheit, da mit $k \geq 0$ gilt: $n - k \leq n$

- Ein **Nullingfilter** kann durch Vorgabe von Nullstellen auf dem Einheitskreis ausgewählte Frequenzen ausblenden

- Ein **Bandpassfilter** zeichnet sich das Durchlassen einers schmalen Frequenzbandes um eine Mittenfrequenz $\hat{\omega}_m$ aus (Verteilung von N äquidistantenen Nullstellen + Herrauskürzen des durchzulassenden Frequenzbandes)

- Komplexe **Wurzeln**: $z = e^{\frac{j2\pi k}{n}},\ k \in \mathbb{Z}$ lösen $z^n - 1 = 0 \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow z^n = e^{j2\pi k}$

- Ein **lineares** System antwortet auf eine Summe gewichteter Eingangssignale mit einer Summe ebensogewichteter Ausgangssignale:

  $g_1[n] = Tr(s_1[n]),\ g_2[n] = Tr(s_2[n])$

  $s[n] = as_1[n] + bs_2[n]$

  $\Longrightarrow Tr(s[n]) = Tr(as_1[n] + bs_2[n])$y

  $= aTr(s_1[n]) + bTr(s_2[n]) = ag_1[n] + bg_2[n]$

- Ein **verschiebungsinvariantes** System, antwortet auf ein um $n_0 \in \mathbb{Z}$ beliebig verschobenes Eingangssignal mit einem um n_0 verschobenen, aber ansonsten unveränderten Ausgangssignal $g[n - n_0]$:

  $g[n] = Tr(s[n]) \implies g[n - n_0] = Tr(s[n - n_0])$

- Eine **Eigenfunktion** $s_e[n]$ reproduziert sich bei der Übertragung über ein LSI-System bis auf eine Skalierung durch einen komplexen Übertragungsfaktor $H(\hat{\omega})$:

  $s_e[n] = Ae^{j\varphi}e^{j\hat{\omega}n}$

  $g[n] = Ae^{j\varphi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\hat{\omega}(n-k)}$

  $$g[n] = \underbrace{Ae^{j\varphi}e^{j\hat{\omega}n}}_{s_e[n]} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\hat{\omega}k}}_{H(\hat{\omega})}$$

- **Verzerrungsfreie Systeme** reproduzieren $s[n]$ fehlerfrei bis auf einen Verstärkungsfaktor $a \in \mathbb{R}^{\neq 0}$und eine Verzögerung $n_0 \in \mathbb{Z}$

  - Beispiel: $h[n] = a\delta[n - n_0]$ (Verszögerer & Verzögerer sind linearphasig)

- **Schwebungstöne** werden durch Addition zweier Schwingungen mit ähnlichen Frequenzen erzeugt. Differenzfrequenz $\omega_\triangle$als Amplitudenmodulierende (Einhüllende)

- **Fundementalsatz der Algebra**: Die Normalform jedes Polynoms $P_N(x)$ N-ten Grades zerfällt in ein Produkt aus N Linearfaktoren:

  $$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_N \prod_{i=1}^{N}(x - x_i)$$

  - Nullstellen bestimmen ein Polynom eindeutig bis auf eine multiplikative Konstante a_N

2 Fouriertransformationen

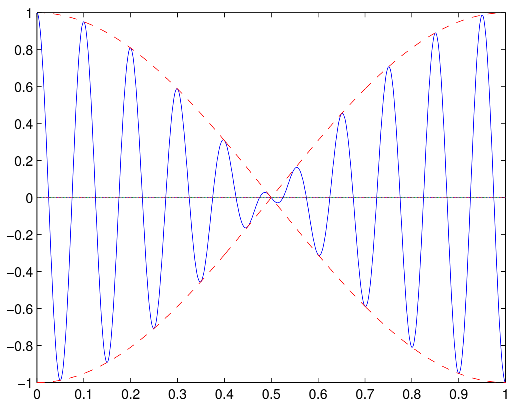
	zeitdiskret ($s[n] = s(nT_s),\ n \in \mathbb{Z}$)	**zeitkontinuierlich** ($s(t),\ t \in \mathbb{R}$)
frequenzdiskret	Diskrete Fouriertransformation $\rightarrow S_d[k]$	Fourier Analyse $\rightarrow a_k$
frequenzkontinuierlich	Fourier Transformation $\rightarrow S(\hat{\omega})$	? (ET 4. Semester)

3 Trigonometrische Funktionen

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	225°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.D.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	1	n.D.	0

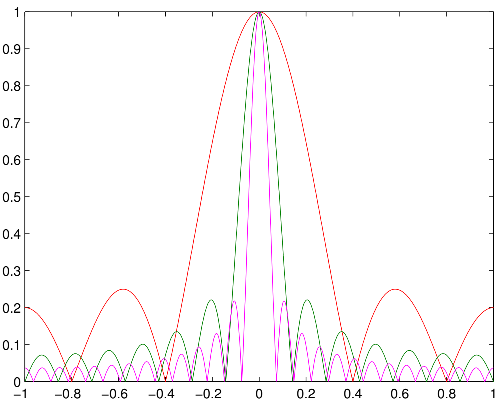
4 MATLAB Plots

Schwebungston: $s(t) = cos(\omega_\triangle t) \cdot cos(\omega_M t)$



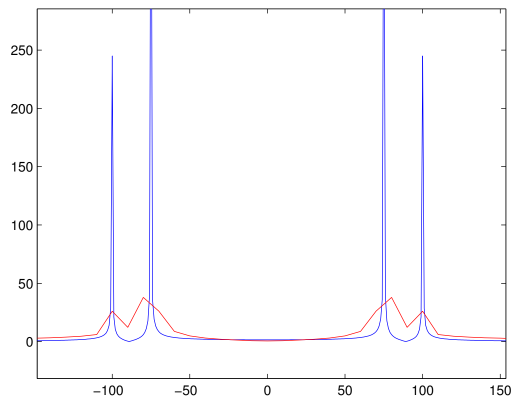
mit $\underbrace{\omega_\triangle}_{Einh\ddot{u}llende} = \pi \ll \underbrace{\omega_M}_{Modulierende} = 20\pi$

Dirichlet-Funktion: $H(\hat{\omega}) = \frac{\sin(\frac{L}{2}\hat{\omega})}{L\sin(\frac{\hat{\omega}}{2})} e^{-j\hat{\omega}\frac{L-1}{2}}$



für L = 5 (rot), 14 (grün), 27 (pink)

FFT: $s[t] = cos(0,15\pi n) + \frac{1}{2}cos(\frac{\pi}{5}n)$



für N = 1000 (blau), 100 (rot)

5 Aufgabentypen

5.1 Signale

- Abtasten: Aliasing & Folding beachten!
- Addieren: Phasoraddition im Komplexen (inverser Euler)
- Multiplizieren
  - mit Einheitssprung: Grenzen anpassen => geometrische Reihe
  - mit Summe aus Einheitsimpulsen:
- Eigenfunktion? eines LSI Systems => Faltungssumme => Eingangssignal isolieren (geometrische Reihe)
- auf Periodizität überprüfen: $y(x) = y(x + x_0)$
- Periodenlänge bestimmen: $x_0$ist Periodendauer
- Skizzieren: Amplitude, Periode bestimmen (Achsenbeschriftung nicht vergessen!)

5.2 Systeme/Filter

- verketten
  - Zeitbereich: Faltung

$$h_{ges}[n] = h_1[n] \star h_2[n]$$

  - Frequenzbereich: Multiplikation:

$$H_{ges}(\hat{\omega}) = H_1(\hat{\omega}) \cdot H_2(\hat{\omega})$$

- LSI Syteme
  - auf Linearität prüfen
  - auf Verschiebungsinvarianz prüfen: durch Gegenbeispiel widerlegen
- Nullstellen aus Übertraguns-/Systemfunktion bestimmen
  - $\frac{1}{z^N}$ ausklammern (Polstellen)
  - Zähler gleich 0 setzen und Nullstellen bestimmen (Binom.-, pq-Formel, Linearfaktoren etc.)
- Systemfunktion aus Nullstellen bestimmen
  - Nullstellen z_i ggf. ablesen
  - $H_z(z) = a_N \prod_{i=1}^{N}(z - z_i),\ z_i \in \mathbb{C}$
  - $H_z(z = 1 = e^{\jmath 0}) = a_N \prod_{i=1}^{N}(1 - z_i) = H(\hat{\omega} = 0)$ (Verstärkung des Gleichanteils)
- Faltung (Kommutativität beachten!)
  - Einheitssprung
    - endliche Kombination => Tabelle
    - unendlich => Faltung durch geschlossene Summe (Grenzen anpassen)
  - endliche Einheitsimpulse => Tabelle
- Amplidtudengang/Übertragungsfkt. zuordnen
  - Systemfunktionen/Impulsanworten/Differenzengleichunge in Amplitudengang umformen
- Impulsantwort aus Eingangs- $s[n]$ & Ausgangssignal $g[n]$ bestimmen:
  1. $\delta[n]$ durch Linearkombination von verschobenen $s[n]$ ausdrücken
  2. *TODO?*

  oder alternativ:

  1. $s[n]$ und $g[n]$ Fouriertransformieren
  2. $H(\hat{\omega}) = \frac{G(\hat{\omega})}{S(\hat{\omega})}$
  3. $h[n]$ durch inverse Fouriertransformation von $H(\hat{\omega})$ bestimmen
- Amplituden-/Phasengang bestimmen:
  1. Übertragungsfunktion aus Differenzengl./Filterkoeffizienten/Impulsantwort bestimmen
  2. $e^{-\jmath k\hat{\omega}}$ symetrisch ausklammern
  3. inversen Euler anwenden
  4. ggf. abschnittsweise definieren, falls $|H(\hat{\omega})| \nless 0\ \forall\hat{\omega}$, mit -1 erweitern

5.3 Sonstiges

- Orthogonalität zeigen => geometrische Reihe